

Étude numérique du changement de phase autour d'un cylindre isotherme en rotation

M. PRUD'HOMME, T. HUNG NGUYEN et P. G. MAO

Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal, C.P.6079 A,
Montréal H3C 3A7, Québec, Canada

(Reçu le 30 juin 1992 et sous forme finale le 16 novembre 1992)

Résumé—On étudie ici la fusion autour d'un cylindre vertical en rotation chauffé à température constante. On traite ce problème pour en matériau à changement de phase de propriétés thermodynamiques constantes, porté initialement à la température de fusion, confiné entre deux plans fixes adiabatiques horizontaux. On néglige les effets de la convection naturelle afin d'étudier le couplage entre la fusion et le développement des cellules de Taylor dans la cavité dont les rapports de forme et des rayons diminuent continuellement. On résout numériquement, pour de faibles nombres de Stefan, les équations gouvernant l'écoulement axisymétrique dans la phase liquide à l'aide de maillages adaptés à la géométrie. Les effets de bouts font que les cellules se développent progressivement. Pour de faibles nombres de Prandtl, la fusion est indépendante de l'écoulement et l'interface ne se déforme pas, mais on retrouve généralement une configuration cellulaire différente de celle qu'on observerait dans une cavité identique de géométrie fixe. Pour des nombres de Prandtl de l'ordre de un, il y a une déformation importante de l'interface et un fort couplage entre la fusion et l'écoulement secondaire.

1. INTRODUCTION

ON REMARQUE depuis plusieurs années une intense activité de recherche sur les phénomènes de changement de phase en général. La perspective de développer à long terme l'énergie solaire sur une grande échelle, de même que les exigences plus immédiates des technologies de pointe, qui requièrent la fabrication de pièces selon des tolérances très strictes, tout particulièrement dans le domaine aérospatial, contribuent largement à susciter de l'intérêt pour ce sujet. L'un des aspects les plus pertinents des recherches sur la fusion et la solidification des matériaux, pour qui désire contrôler adéquatement le processus, est sans aucun doute l'étude de l'écoulement dans la phase liquide. En effet, il est d'ores et déjà amplement confirmé par l'expérience que le changement de phase dépend d'une façon marquée de l'évolution de ces écoulements. A ce sujet, l'expérience de Vivès [1], sur la solidification de l'étain, a pu montrer à quel point l'écoulement secondaire induit dans le liquide par la rotation du cylindre extérieur peut affecter le grain du métal solidifié.

On peut également envisager une autre situation, parfaitement concevable à savoir la fusion autour d'un cylindre en rotation. Pour un cylindre de hauteur finie, cette configuration entraîne l'apparition progressive de cellules de Taylor dans une cavité dont le rapport de forme diminue continuellement et permet l'étude du couplage fondamental entre le changement de phase et un écoulement instable du point de vue hydrodynamique. Le problème de Taylor entre deux cylindres infinis, désormais classique, fait encore l'objet d'une multitude de travaux, aussi bien théoriques qu'expérimentaux. On peut citer ici les excell-

entes études bibliographiques de Cognet [2] ou de Di Prima et Swinney [3], qui permettent d'apprécier toute la richesse et la complexité des solutions du problème. Rappelons brièvement à ce sujet que lorsqu'on augmente la vitesse de rotation du cylindre intérieur, caractérisée par le nombre de Taylor Ta , au-delà d'un premier seuil T_{c1} , on observe une bifurcation super-critique de l'écoulement initial de Couette, purement circulaire, vers un écoulement axisymétrique caractérisé par l'apparition de cellules toriques régulièrement espacées dans la direction axiale : les cellules de Taylor. Les expériences de Coles [4] et plus récemment celles de Andereck *et al.* [5] ont pu mettre en évidence qu'au delà d'un second seuil critique T_{c2} , l'écoulement entre en régime d'ondes azimutales. Le mouvement perd alors son axisymétrie initiale. En outre, le problème admet désormais des solutions multiples, phénomène qui s'accompagne souvent d'effets d'hystérésis. A mesure que l'on continue d'augmenter le nombre de Taylor, divers régimes complexes se succèdent à travers la transition jusqu'à la turbulence complète de l'écoulement.

Toutefois, la discussion ci-dessus ne s'applique bien qu'aux cylindres dont le rapport de forme L/d est supérieur à 15 ou 20 environ. Le cas des cylindres plus courts est fondamentalement différent en ce sens que les effets de bouts font que les cellules se développent progressivement avec l'augmentation de la vitesse de rotation, tout d'abord lentement, puis très rapidement ensuite lorsque Ta approche le seuil critique T_c correspondant au cylindre infini. Les simulations numériques de Alziary de Roquefort et Grillaud [6] pour un rapport des rayons η de 0.933 et une enceinte de rapport de forme $L/d = 10$ illustrent très bien ce phénomène. D'autre part, Cole [7], à l'aide de tech-

NOTATIONS

c	chaleur massique [J kg ⁻¹ K ⁻¹]	Symboles grecs	
d	espace annulaire, $r_j - r_i$ [m]	α	diffusivité thermique [m ² s ⁻¹]
l	chaleur latente de fusion [J kg ⁻¹]	Γ	produit rv [m ² s ⁻¹]
L	hauteur du cylindre [m]	ε	nombre de Stefan, $c(T_i - T_f)/l$
n	direction normale à l'interface liquide-solide	η	rapport des rayons, r_i/r_j
\hat{n}	vecteur unitaire selon la normale (n_r, n_z)	θ	coordonnée
Nu	nombre de Nusselt local	ν	viscosité cinématique [m ² s ⁻¹]
p	pression dynamique [Pa]	ρ	masse volumique [kg m ⁻³]
Pe	nombre de Peclet, $Re Pr$	τ	temps adimensionnel
Pr	nombre de Prandtl, ν/α	ψ	fonction courant [m ² s ⁻¹]
r	coordonnée [m]	ω	vorticité, ($\omega_r, \omega_\theta, \omega_z$) [s ⁻¹]
Re	nombre de Reynolds, $\Omega r_i^2/\nu$	Ω	vitesse angulaire [s ⁻¹].
t	temps [s]	Indices et exposants	
T	température [C]	f	valeur à l'interface liquide-solide
Ta	nombre de Taylor simplifié, $Re(d/r_i)^{3,2}$	i	valeur sur la surface du cylindre.
\mathbf{u}	vecteur vitesse, (u, v, w) [m s ⁻¹]	Autres symboles	
V	volume liquide [m ³]	∇	gradient
V_j	volume liquide relatif	$\nabla \cdot$	divergence
z	coordonnée [m].	∇^2	laplacien.

niques de visualisation et de mesures de couple dans des enceintes avec une surface libre au sommet, pour une gamme de paramètres $1 < L/d < 107$ et $0.894 < \eta < 0.954$, a pu montrer que T_c ne varie que très peu en fonction de L/d , mais que le second seuil critique T_c' est fortement affecté par la diminution du rapport de forme de l'enceinte. Ainsi, T_c' augmente d'au moins 50% par rapport à la valeur prévue pour un cylindre infini lorsque $L/d = 10$ et du double lorsque $L/d = 5$, et ce, pour tous les η examinés. La dépendance en η est très marquée elle aussi. Cognet [2] mentionne à ce sujet que le second seuil critique est d'autant plus éloigné du premier que η est petit. Pour de longs cylindres, T_c' vaut grosso modo $2T_c$ pour $\eta = 0.8$ et plus de $10T_c$ pour $\eta = 0.5$. L'analyse de stabilité de Blennerhassett et Hall [8], qui supposait aux extrémités de l'enceinte des conditions telles que le problème admette encore l'écoulement de Couette comme solution exacte, comme dans le cas du cylindre infini, est venue corroborer les observations de Cole à propos de T_c . De plus, les auteurs démontrèrent que le problème admet des solutions multiples, dépendamment des conditions initiales, ce que prévoyaient également les calculs de Alziary de Roquefort et Grilaud pour des extrémités fixes. Toujours pour cette configuration, les résultats théoriques et expérimentaux de Benjamin [9] pour des rapports de forme inférieurs à 6 environ et $\eta = 0.615$ ont mis en évidence des effets d'hystérésis pour certaines valeurs de L/d et surtout le fait qu'en dépit de la multiplicité des solutions, il existe pour chaque L/d un mode primaire qui s'établit naturellement en augmentant progressivement Ta et un mode secondaire qui ne s'obtient qu'en faisant varier successivement Ta et L/d .

L'écoulement de Taylor entre deux cylindres de longueur finie constitue en soi un champ d'étude distinct du problème classique, qui n'a été que relativement peu exploré jusqu'ici. Il apparaît opportun dans ces circonstances de réexaminer cet écoulement dans le contexte d'un changement de phase, où les paramètres géométriques L/d et η ne sont pas fixés, mais diminuent continuellement avec la progression de l'interface et de voir comment se développe l'écoulement dans ces conditions pour différents nombres de Prandtl.

2. FORMULATION DU PROBLÈME

On se propose donc de faire l'étude du problème schématisé de la Fig. 1. Un matériau solide au point de fusion T_f est compris entre deux plans adiabatiques à $z = 0$ et $z = L$. Un cylindre vertical de rayon r_i en rotation à la vitesse angulaire Ω y est enfoui. La fusion débute à l'instant $t = 0$, alors qu'on porte le cylindre à une température constante $T_i > T_f$. Pour les besoins de l'analyse qui va suivre, on considère la phase liquide comme un fluide incompressible de propriétés thermodynamiques constantes. On suppose au départ que la convection naturelle ne joue aucun rôle dans ce problème et que l'écoulement est entièrement dû à la rotation du cylindre, de façon à permettre l'étude du seul couplage entre l'instabilité de Taylor et le changement de phase. Les conditions habituelles de glissement nul s'appliquent aux composantes du champ de vitesse axisymétrique $u(r, z)$, $v(r, z)$ et $w(r, z)$, qui s'annulent sur toutes les frontières, sauf à $r = r_i$, où la vitesse aximutale v vaut $v = \Omega r_i$. En négligeant l'échauffement visqueux, le système d'équations

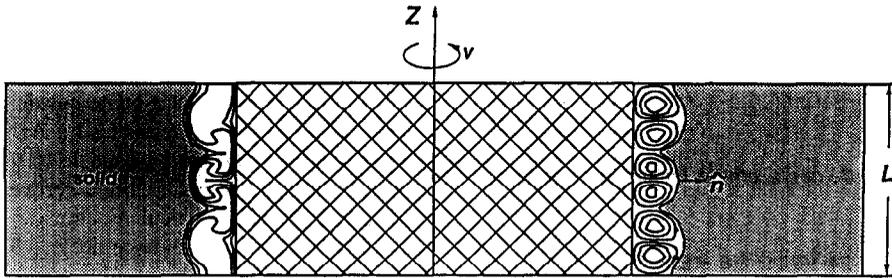


FIG. 1. Géométrie et système de coordonnées.

gouvernant l'écoulement sera donc

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \alpha \nabla^2 T. \tag{3}$$

On peut éliminer d'emblée le champ de pression en prenant le rotationnel de (2), ce qui conduit à l'équation

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \tag{4}$$

pour la vorticité $\boldsymbol{\omega}$. La composante selon θ de cette équation est donnée par

$$\frac{\partial \omega_\theta}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_\theta}{\partial r} + w \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} - \frac{u \omega_\theta}{r} - \frac{2\nu}{r} \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \left(\nabla^2 \omega_\theta - \frac{\omega_\theta}{r^2} \right) \tag{5}$$

où par définition

$$\omega_\theta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}. \tag{6}$$

Cette formulation permet de voir comment l'étirement des lignes de vorticité, représentée par le terme $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ dans (4), fait apparaître la composante radiale de la vorticité $\omega_r = -\partial v / \partial z$ dans l'équation de transport de ω_θ où elle joue le rôle d'un terme source. Sans ce gradient de vitesse, il ne peut y avoir d'écoulement dans le plan r, z . D'autre part, la vitesse v doit vérifier

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \nu \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} \right). \tag{7}$$

Le changement de variables $\Gamma = rv$ permet d'éliminer le terme uv ci-dessus, mais avant d'aller plus loin, il est préférable de recourir à une formulation adimensionnelle en définissant les variables

$$\begin{aligned} (r, z, n)' &= (r, z, n)/r_i & (u, w)' &= (u, w)/\Omega r_i \\ \tau &= \varepsilon \alpha t / r_i^2 & \omega' &= \omega_\theta / \Omega & \psi' &= \psi / \Omega r_i^3 \\ \Gamma' &= rv / \Omega r_i^2 & T' &= (T - T_f) / (T_i - T_f). \end{aligned}$$

En omettant dorénavant les symboles primes pour alléger l'écriture, les équations (3), (5) et (7) retransform es peuvent s'écrire sous forme compacte

$$\left(\frac{\varepsilon}{Pe} \frac{\partial}{\partial \tau} + u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{Bmatrix} \omega \\ \Gamma \\ T \end{Bmatrix} = \nabla^2 \begin{Bmatrix} \omega / Re \\ \Gamma / Re \\ T / Pe \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} S_\omega \\ S_\Gamma \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

en termes des nombres de Reynolds Re , Pecllet Pe , et Stefan ε et des quantités

$$S_\omega = \frac{\omega}{r} \left(u - \frac{1}{r Re} \right) + \frac{2}{r^3} \Gamma \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \tag{9}$$

$$S_\Gamma = -\frac{2}{r Re} \frac{\partial \Gamma}{\partial r}. \tag{10}$$

On peut tirer avantage de l'hypothèse de symétrie axiale de l'écoulement introduisant une fonction de courant ψ permettant d'exprimer les composantes du champ de vitesse u, w de même que la composante de la vorticité selon θ à partir de

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{11}$$

$$w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{12}$$

$$r\omega = \nabla^2 \psi - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \tag{13}$$

Cette dernière équation fournit les conditions limites pour ω . En ce qui concerne la fonction de courant elle-même, la condition est $\psi = 0$, tout simplement. Les variables Γ et T doivent quant à elles vérifier les conditions

$$T = \Gamma = 1; \quad r = 1$$

$$T = \Gamma = 0; \quad r = r_f$$

$$\partial T / \partial z = \Gamma = 0; \quad z = 0, L.$$

Ni la position ni la forme de l'interface liquide-solide ne sont connues à priori. Néanmoins leur évolution obéit à une relation simple basée sur un bilan d'énergie thermique à l'interface. En posant que la masse volumique du matériau demeure constante

lors du changement de phase, le bilan donne sous forme adimensionnelle la relation

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = - \frac{\partial T}{\partial n} \quad (14)$$

pour la vitesse de déplacement locale de l'interface.

3. MÉTHODE DE RESOLUTION

Les équations de l'écoulement dans la phase liquide sont résolues numériquement dans un système de coordonnées adapté à la géométrie de la cavité, ce qui nécessite une technique de génération de maillage par ordinateur. La méthode générale de transformation des coordonnées de Thompson *et al.* [10] a été retenue pour ce faire, qui permet d'exercer un bon contrôle de la répartition des noeuds à l'intérieur du domaine de calcul et d'obtenir un maillage orthogonal aux frontières. Il faut générer un nouveau maillage à chaque pas de calcul dans le temps afin de suivre fidèlement la déformation progressive de la cavité. S'il y a besoin, on peut procéder à une redistribution des noeuds le long de l'interface liquide-solide avant de générer un nouveau maillage. Une interpolation par splines cubiques permet alors de répartir adéquatement les noeuds le long de l'interface et, par conséquent, à l'intérieur de cavité.

La transformation a pour effet d'immobiliser l'interface dans le nouveau système de coordonnées, ce qui permet de résoudre les équations transformées dans un domaine rectangulaire fixe tout au long du processus de fusion. Les règles du calcul tensoriel permettent de transformer sans trop de difficulté les équations et les conditions limites d'un système à l'autre, tel qu'exposé dans [11]. Il faut ensuite résoudre le système d'équations transformées par différences finies. L'emploi d'un maillage uniforme simplifie la tâche. Les équations qui dépendent du temps sont discrétisées de façon implicite, selon un schéma du premier ordre. Les termes d'advection des équations de transport sont discrétisés selon le schéma upwind du second ordre afin de s'assurer de la stabilité numérique durant les calculs. Tous les autres termes sont traités selon le schéma habituel de différences centrées. L'algorithme de solution retenu pour résoudre le système discret repose sur une approche quasi-statique, qui consiste à résoudre séparément les équations pour ω , θ , Γ et ψ à chaque pas de calcul dans le temps, puis à calculer seulement ensuite la nouvelle position de l'interface. Le programme numérique a été testé au préalable [12] en effectuant une série de simulations du problème de Taylor sans changement de phase, dont les résultats furent comparés avec les prédictions de Meyer [13] et d'Alonso [14].

Pour les simulations avec changement de phase, on débute les calculs à $\tau = 0$, en supposant une mince couche de liquide autour du cylindre, d'une épaisseur égale à 2% du rayon du cylindre en rotation. On

suppose un profil de Couette pour v et un champ nul pour toutes les autres variables, à l'exception de T qui vaut 1 à $r = 1$. On choisit ensuite un pas de calcul tel que le volume liquide n'augmente pas de plus de 1% durant un intervalle de temps égal à $\Delta\tau$. Les calculs ont été effectués pour un maillage de 15 noeuds selon l'horizontale et 41 noeuds selon la verticale. Pour un cas typique, le pas de calcul $\Delta\tau$ était de 1×10^{-4} . Il faut alors compter en moyenne de 75 à 85 itérations par $\Delta\tau$ pour obtenir une solution avec convergence raisonnable. Le temps de calcul requis pour cette opération est de 20 s de CPU environ sur un ordinateur IBM 3900. Par ailleurs, des tests de dépendance du maillage ont révélé que l'emploi d'un maillage plus fin de 21 noeuds par 42 n'affectait pas les prédictions des minima et maxima de ψ de plus de 1% environ, reproduisait pratiquement les mêmes lignes de courant et les mêmes isothermes et demandait finalement presque deux fois autant de temps de calcul. Par conséquent, seul le maillage de 15 noeuds par 41 a été utilisé par la suite.

4. RÉSULTATS

Pour un matériau au point de fusion, il ne peut y avoir de conduction de chaleur dans la phase solide tant que le changement de phase n'est pas terminé. Par conséquent, on peut dans ce cas-ci faire l'étude de la cavité formée par le liquide, sans se préoccuper de la phase solide. On se penchera tout d'abord sur le cas d'un fluide dont le nombre de Prandtl est faible, afin de bien mettre en évidence l'effet, sur le développement des cellules de Taylor, de la seule évolution continue du rapport de forme de la cavité. Nous examinerons seulement ensuite le cas d'un fluide de nombre de Prandtl plus élevé, pour lequel il y aura une déformation importante de l'interface.

On peut définir dans tous les cas un rayon externe moyen $\bar{r}_j(\tau)$ de la cavité ainsi qu'un espace annulaire moyen $d = \bar{r}_j(\tau) - r_i$, que celle-ci demeure rectangulaire ou non, en se basant sur le volume liquide total

$$V = \pi L(\bar{r}_j^2 - r_i^2) \quad (15)$$

où $L = r_i$. Ces échelles permettent de former ensuite pour les besoins de l'étude le nombre de Taylor simplifié

$$Ta = Re \left(\frac{d}{r_i} \right)^{3,2} \quad (16)$$

proposé par Stuart [15] qui est, avec le rapport de forme L/d et le rapport des rayons $\eta = r_i/\bar{r}_j(\tau)$, l'un des paramètres fondamentaux pour la discussion des résultats. Ceux-ci ont tous été calculés pour $Re = 1000$ et $\varepsilon = 0.014$ ou 0.15 selon le cas. Les travaux de Sparrow *et al.* [16], Wu *et al.* [17], et plusieurs autres sur des problèmes similaires ont démontré que l'écoulement et le transfert thermique ne dépendent pas vraiment de ε lorsque celui-ci est petit, comme

c'est le cas ici, et l'approche quasi-statique devient alors une excellente approximation.

4.1. Faible nombre de Prandtl

Les résultats présentés dans cette section le sont pour $Pr = 0.0089$, ce qui correspond à de l'étain au point de fusion, comme dans l'expérience de Vivès [1]. Pour une telle valeur, l'influence de l'écoulement de Couette-Taylor sur le changement de phase est peu importante, étant donné que le transfert de chaleur s'effectue essentiellement par conduction. Les résultats seraient donc pratiquement identiques, toutes choses égales, pour un autre fluide de faible nombre de Prandtl.

La Fig. 2 décrit l'évolution des lignes de courant et des isothermes à l'intérieur de la cavité. Le Tableau 1 donne les valeurs correspondantes de Ta et des paramètres géométriques de même que le premier seuil critique T_c pour l'apparition des cellules de Taylor axisymétriques entre deux cylindres infinis de η comparable. Les valeurs de référence pour T_c sont tirées des travaux de Roberts [18] et Wallowit *et al.* [19].

Au début, lorsque $\tau = 0.005$, l'écoulement est sous-critique. On détecte pourtant la présence de cellules de Taylor dites 'fantômes', c'est-à-dire d'une intensité extrêmement faible comme l'avait remarqué Benjamin [9] dans le cas de deux cylindres. Mais il n'y a en fait que deux cellules d'intensité appréciable : les cellules de type Ekman visibles aux extrémités de la cavité. Contrairement aux cellules de Taylor qui sont le produit d'une instabilité hydrodynamique, les cellules d'Ekman apparaissent instantanément avec la phase liquide à $\tau = 0$. Il n'est pas difficile d'expliquer l'origine de ces cellules si on se réfère au champ de pression. La rotation exige que la pression s'accroisse dans la direction radiale de façon à fournir l'accélération centripète aux particules de fluide. Cet accroissement ne se produit pas indépendamment de la position verticale z cependant, étant plus prononcé au centre de la cavité et moins important au voisinage des parois supérieures et inférieures où joue la condition de glissement nul. Il s'établit alors un gradient de pression vertical $\partial P/\partial z$ qui déclenche l'écoulement secondaire u et w .

L'intensité des cellules fantômes augmente rapidement avec Ta , et elles sont nettement visibles lorsque $\tau = 0.002$. Le nombre de cellules présentes à l'intérieur de la cavité diffère cependant du nombre qu'on trouverait dans le cas d'une enceinte cylindrique classique de forme identique. Par exemple, lorsque $\tau = 0.03$, on compte six cellules pour un rapport de forme L/d de 4.22 alors que les calculs de Blennerhassett [8] et les mesures de Cole [7] en prévoient quatre, ce qui montre bien la persistance des configurations cellulaires, qui fait que l'écoulement retarde en quelque sorte par rapport à la géométrie qui évolue constamment à cause du changement de phase. La configuration à six cellules se transforme ensuite à mesure que diminue le rapport de forme. L'intensité des quatre cellules centrales s'amenuise au profit des cellules du haut et

du bas qui grandissent jusqu'à occuper toute la cavité lorsque $\tau = 0.1$. Ce régime bicellulaire correspond au mode primaire prévu par Benjamin pour $L/d < 3.6$, auquel on doit s'attendre quand on augmente de façon progressive le nombre de Taylor, comme c'est le cas ici. L'hypothèse d'axisymétrie faite lors de la formulation du problème est certainement justifiée pour la gamme de nombres de Taylor donnée ci-dessus. Le régime d'ondes azimutales n'est atteint que pour des valeurs de Ta bien supérieures dans la plupart des cas, il semble même qu'il disparaisse complètement selon Cognet [2] lorsque $L/d < 6$. Un peu plus délicate est la question de l'unicité des solutions obtenues. Les solutions multiples ne sont pas exclues a priori. Il semble acquis cependant, d'après les investigations de Benjamin, Alziary de Roquefort et Grillaud [6], Pommeau et Zaleski [20], que les modes secondaires n'apparaissent pas spontanément et que le nombre d'ondes des cellules est défini de façon unique lorsque le système effectue des transitions progressives. On peut donc raisonnablement supposer que les résultats obtenus sont réalistes.

Durant tout ce temps, l'interface liquide-solide demeure verticale comme on peut le constater. Le transfert de chaleur est essentiellement dominé par la conduction du début à la fin, étant donné que la diffusivité thermique du fluide est supérieure de deux ordres de grandeur à sa viscosité cinématique. Le profil du nombre de Nusselt moyen à l'interface, représenté à la Fig. 3, se confond alors avec le profil en conduction pure correspondant à la fusion sans écoulement à l'intérieur de la cavité. La Fig. 4 décrit l'évolution du rapport V_l du volume liquide au volume du cylindre en fonction du temps, et la Fig. 5 celle du nombre de Taylor Ta .

4.2. Nombre de Prandtl moyen

On considère ensuite le cas d'un matériau pour lequel la phase liquide est un fluide de nombre de Prandtl moyen. Le processus de fusion est alors caractérisé par une déformation importante de l'interface liquide-solide, occasionnée par le fort couplage entre l'écoulement et le transfert de chaleur. Les calculs ont été effectués pour $Pr = 7$ et $\varepsilon = 0.15$, étant donné que les travaux de Sparrow *et al.* [16] (et de plusieurs autres) ont permis de conclure que les résultats qu'on obtient sont indépendants, à toute fin pratique, des nombres de Prandtl et de Stefan, tant que $Pr > 7$ et $\varepsilon < 0.15$.

La Fig. 6 présente les isothermes et les lignes de courant à différentes étapes du processus. Au début, lorsque $\tau = 0.002$, l'écoulement secondaire est faible et la conduction est encore le principal mécanisme de transfert de chaleur à travers le liquide. Le flux de chaleur est alors à peu près uniforme le long de l'interface liquide-solide, qui demeure droite. L'intensité des cellules s'accroît cependant rapidement avec le temps et l'on constate déjà une distorsion de l'interface pour $\tau = 0.005$. Ceci est dû au fait que l'écoulement secondaire force le fluide à absorber de la chaleur en

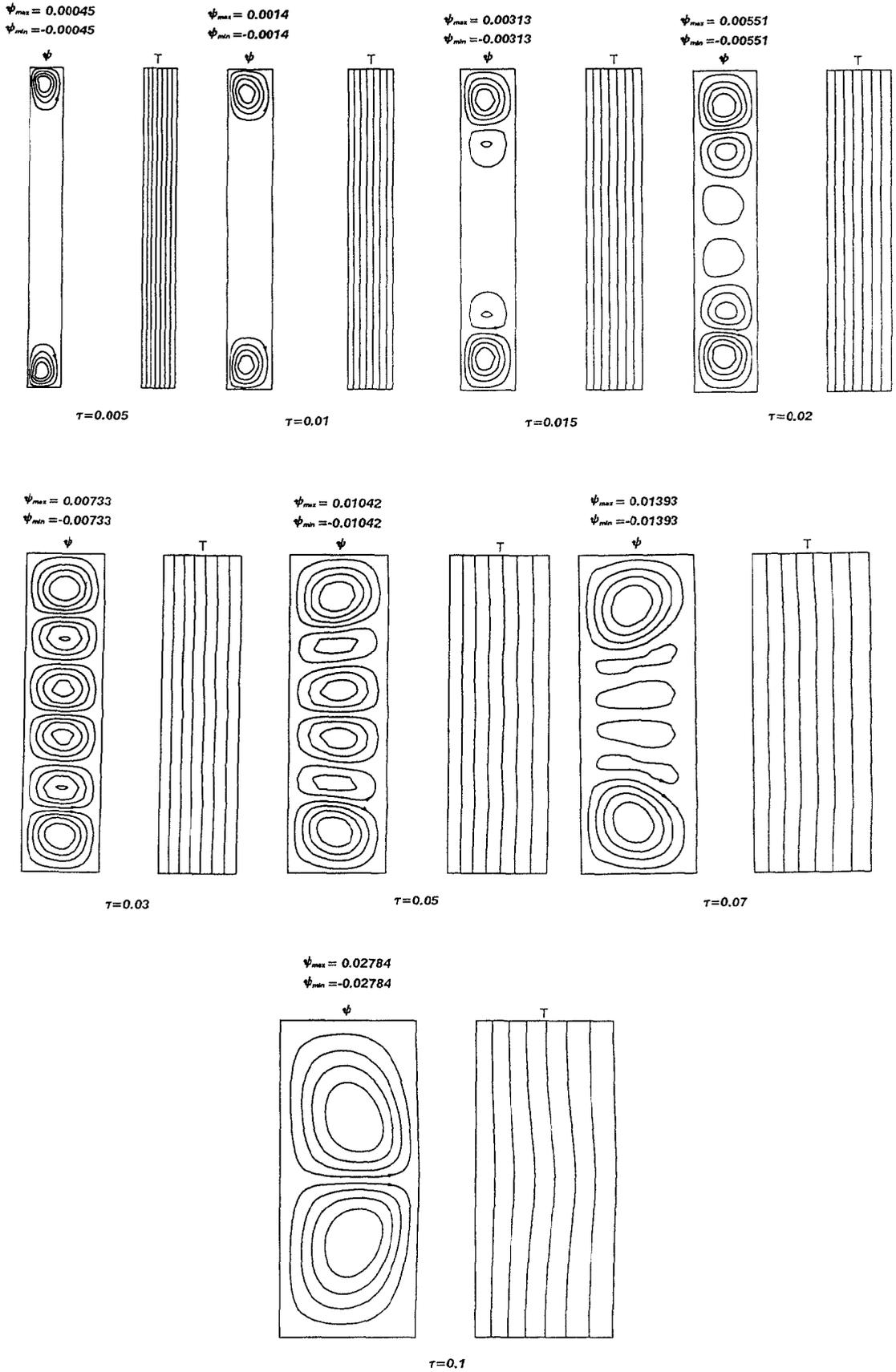


FIG. 2. Isothermes et lignes de courant, $Pr = 0.0089$.

Tableau 1. Paramètres de l'écoulement en fonction du temps, $Pr = 0.0089$

τ	Ta	d/r_i	η	L/d	T_c
0.005	31.6	0.100	0.909	10.0	43.9
0.010	52.0	0.139	0.878	7.18	44.7
0.015	69.9	0.170	0.855	5.90	45.5
0.020	85.8	0.195	0.837	5.14	
0.030	115	0.236	0.809	4.22	47.4
0.050	167	0.303	0.768	3.30	
0.070	212	0.355	0.738	2.81	
0.100	274	0.422	0.703	2.37	52.0

longeant le cylindre en rotation avant de revenir à céder à l'interface. Cette circulation favorisant le transfert de chaleur a pour conséquence que la fusion s'accélère et l'interface devient localement convexe. Les isothermes révèlent cependant que la conduction joue encore en rôle important au centre de la cavité. A ce régime mixte succède un régime entièrement dominé par la convection, très visible à partir de $\tau = 0.008$. On constate la formation de couches limites thermiques à l'interface alternant avec des couches à la paroi cylindrique qui tendent respectivement à favoriser et à s'opposer à la fusion en augmentant ou diminuant selon le cas le gradient de température à l'interface. Le Tableau 2 donne les valeurs des paramètres géométriques et du nombre de Taylor équivalents, basés sur le \bar{r}_f défini par l'équation (15), qui n'ont ici qu'une valeur purement indicative, compte tenu de la distorsion très prononcée de l'interface. A ce propos, il est intéressant de voir que la géométrie de la cavité, qui s'adapte constamment à la forme des cellules, détermine autrement que dans le cas des faibles nombres de Prandtl la sélection du nombre d'ondes des cellules de Taylor, dont la configuration subit une évolution différente.

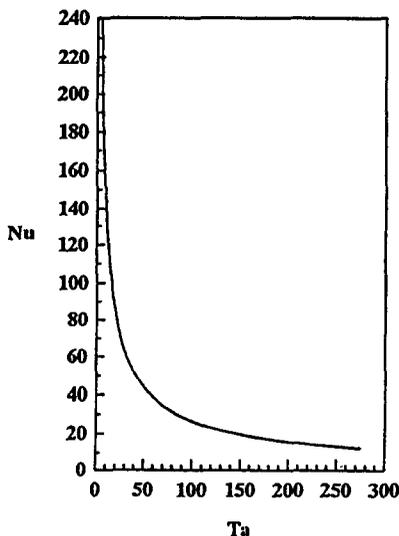


FIG. 3. Nombre de Nusselt en fonction du nombre de Taylor, $Pr = 0.0089$.

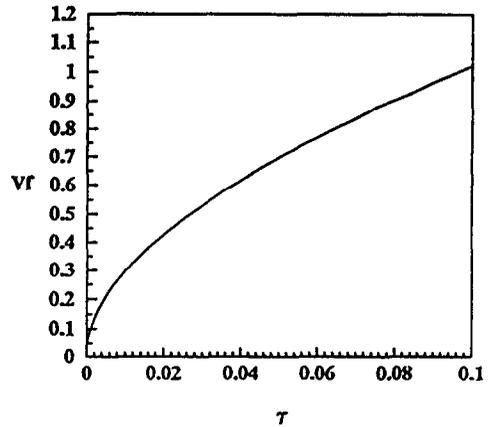


FIG. 4. Volume liquide relatif en fonction du temps, $Pr = 0.0089$.

La Fig. 7 illustre l'évolution du volume liquide relatif V_f en fonction de τ . La solution en conduction pure a été ajoutée pour fins de comparaison. On voit clairement que les deux solutions se confondent au début alors que l'écoulement secondaire est de faible intensité. L'écart se manifeste en régime mixte à mesure que les cellules de Taylor se développent jusqu'à occuper tout l'espace de la cavité, lorsque $\tau = 0.008$ environ. Ensuite V_f augmente à un taux à peu près constant et l'écart s'accroît encore plus rapidement. La Fig. 8 montre d'ailleurs clairement le changement de pente du profil de Ta qui coïncide avec le début du régime convectif. Le nombre de Nusselt moyen à l'interface subit une évolution marquée durant le processus, reliée au développement des cellules, comme on peut le voir sur les Figs. 9(a) et (b) qui donnent les profils en fonction de τ et de Ta , respectivement. La Fig. 9(a) permet de constater que Nu diminue très rapidement au début, comme le profil en conduction pure, pour passer par un minimum en régime mixte, puis augmenter à mesure que se forment

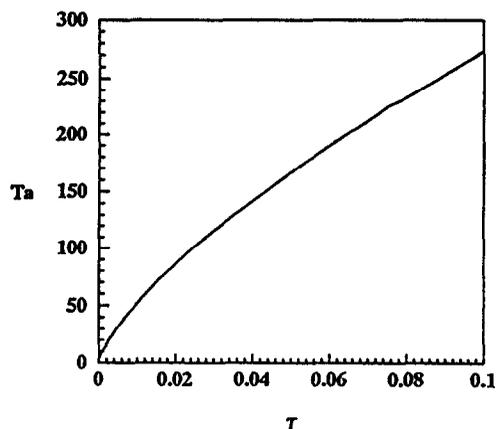


FIG. 5. Nombre de Taylor en fonction du temps, $Pr = 0.0089$.

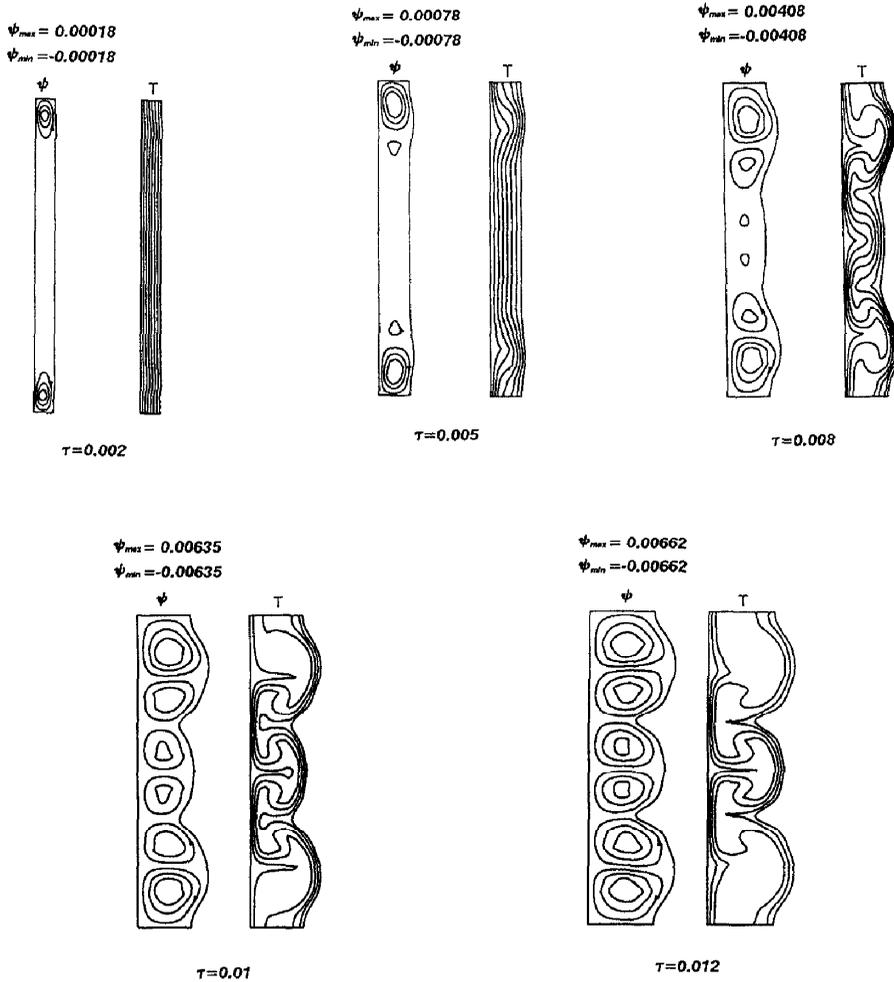


FIG. 6. Isothermes et lignes de courant, $Pr = 7$.

les couches limites favorisant les échanges thermiques, pour rediminuer ensuite à mesure que celles-ci deviennent moins nettes, alors que la température tend à s'uniformiser à l'intérieur de la cavité. La Fig. 9(b) présente les résultats sous une forme alternative permettant de mieux apprécier les transitions, entre le régime conductif initial, le régime mixte intermédiaire et le régime convectif final.

5. CONCLUSIONS

Pour de faibles nombres de Prandtl, la fusion ne dépend pas de l'écoulement dans la phase liquide et

l'interface progresse uniformément, modifiant ainsi le rapport de forme et le rapport des rayons de la cavité, qui diminuent continuellement. Les cellules se développent progressivement à l'intérieur de la

Tableau 2. Paramètres de l'écoulement en fonction du temps, $Pr = 7$

τ	Ta	d/r_i	η	L/d
0.002	16.1	0.064	0.940	15.7
0.005	31.9	0.101	0.909	9.94
0.008	53.3	0.142	0.876	7.06
0.010	79.8	0.185	0.844	5.40
0.012	112	0.232	0.812	4.31

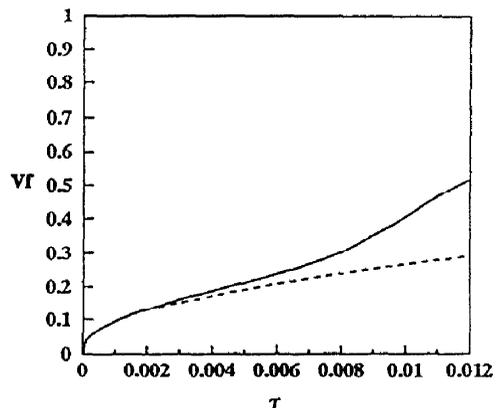
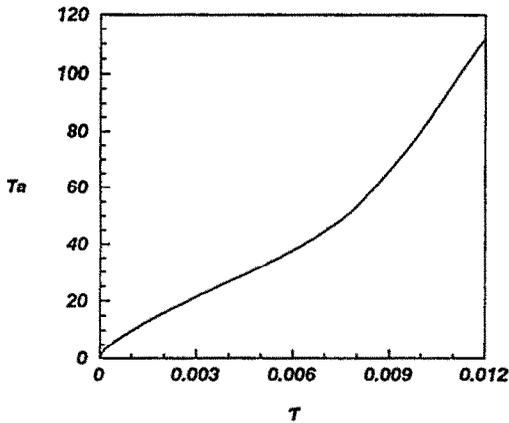
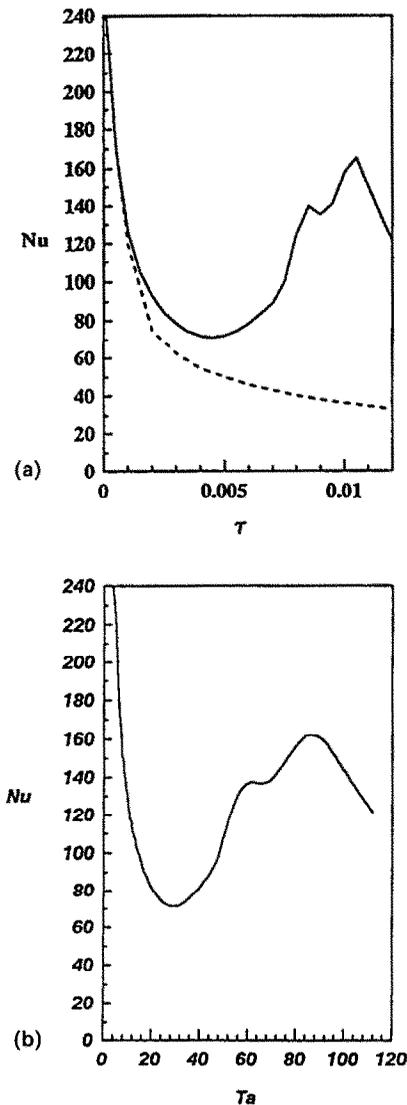


FIG. 7. — : Volume liquide relatif en fonction du temps, $Pr = 7$; - - - : solution en conduction pure.

FIG. 8. Nombre de Taylor en fonction du temps, $Pr = 7$.FIG. 9. (a) — : Nombre de Nusselt en fonction du temps, $Pr = 7$; - - - : solution en conduction pure. (b) Nombre de Nusselt en fonction du nombre de Taylor, $Pr = 7$.

cavité, comme dans toutes les situations où les effets de bouts sont importants, mais leur nombre diffère généralement de celui qu'on retrouverait pour des valeurs statiques des paramètres géométriques L/d et η . Pour un nombre de Prandtl modéré, on constate rapidement après le début du processus un couplage fort entre la fusion et l'écoulement, accompagné d'une déformation prononcée de l'interface. Durant ce temps, le nombre de Nusselt moyen subit une évolution marquée et fortement tributaire de la configuration cellulaire.

Remerciements—Ce travail a été rendu possible grâce à une subvention du Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. Vivès, Effects of a forced Couette flow during the controlled solidification of a pure metal, *Int. J. Heat Mass Transfer* **31**, 2047–2062 (1988).
2. G. Cognet, Les étapes vers la turbulence dans l'écoulement de Couette–Taylor entre cylindres co-axiaux, *J. Méc. Théor. Appl.* numéro spécial, 7–44 (1984).
3. R. C. Di Prima and H. L. Swinney, Instabilities and transition in flow between concentric rotating cylinders. In *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence* (Edited by H. L. Swinney and J. P. Gollub), Chap. 6. Springer, Berlin (1985).
4. D. Coles, Transition in circular Couette flow, *J. Fluid Mech.* **21**, 385–485 (1965).
5. C. D. Andereck, S. S. Liu and H. L. Swinney, Flow regimes in a circular Couette system with independent rotating cylinders, *J. Fluid Mech.* **164**, 155–183 (1986).
6. T. Alziary de Roquefort and G. Grillaud, Computation of Taylor vortex flow by a transient implicit method, *Comput. Fluids* **6**, 259–269 (1978).
7. J. A. Cole, Taylor-vortex instability and annulus-length effects, *J. Fluid Mech.* **75**, 1–15 (1976).
8. P. J. Blennerhassett and P. Hall, Centrifugal instability of circumferential flows in finite cylinders: linear theory, *Proc. R. Soc. Lond. A* **365**, 191–207 (1979).
9. T. B. Benjamin, Bifurcation phenomena in steady flow of a viscous fluid. II. Experiments, *Proc. R. Soc. Lond. A* **359**, 27–43 (1978).
10. J. F. Thompson, F. C. Thames and C. W. Mastin, Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies, *J. Comp. Physics* **15**, 299–319 (1974).
11. M. Prud'homme, T. H. Nguyen et Y. K. Wu, Simulation numérique de la fusion à l'intérieur d'un cylindre adiabatique chauffé par le bas, *Int. J. Heat Mass Transfer* **34**, 2275–2286 (1991).
12. M. Prud'homme, T. H. Nguyen and P. G. Mao, Numerical simulation of melting inside a rotating cylindrical enclosure, *Int. J. Heat Mass Transfer* **36**, 57–69 (1993).
13. K. A. Meyer, Time dependent numerical study of Taylor vortex flow, *Phys. Fluids* **10**, 1847–1879 (1967).
14. C. V. Alonso and E. O. Macagno, Numerical integration of the time-dependent equations of motion for Taylor vortex flow, *Comput. Fluids* **1**, 301–316 (1973).
15. J. T. Stuart, On the non-linear mechanics of hydrodynamic instability, *J. Fluid Mech.* **4**, 1–21 (1958).
16. E. M. Sparrow, S. V. Patankar and S. Ramadhyani, Analysis of melting in the presence of natural convection in the melt region, *J. Heat Transfer* **99**, 520–526 (1977).
17. Y. K. Wu, M. Prud'homme et T. Hung Nguyen, Etude

- numérique de la fusion autour d'un cylindre vertical soumis à deux types de conditions limites, *Int. J. Heat Mass Transfer* **32**, 1927–1938 (1989).
18. P. H. Roberts, The solution of the characteristic value problem, *Proc. R. Soc. Lond. A* **283**, 550–556 (1965).
19. J. Walowit, S. Tsao and R. C. Di Prima, Stability of flow between arbitrarily spaced concentric cylindrical surfaces including the effect of a radial temperature gradient, *ASME J. Appl. Mech.* **31**, 585–593 (1964).
20. Y. Pommeau and S. Zaleski, Pattern selection in slowly varying environment, *J. Phys. Lett.* **44**, 135–141 (1981).

NUMERICAL SIMULATION OF A PHASE CHANGE AROUND AN ISOTHERMAL ROTATING CYLINDER

Abstract—Melting around a rotating vertical cylinder heated at constant temperature is being studied numerically. The problem is examined for a phase change material of constant thermal properties, initially at the fusion temperature, confined between two horizontal fixed adiabatic planes. Natural convection effects are left aside to study the coupling between melting and the growth of Taylor vortices in a cavity with continuously decreasing aspect and annular ratios. The governing equations for axisymmetric flow in the melt region are solved numerically, for small Stefan numbers, using body-fitted grids. As a consequence of the finite cavity length, the growth of the cells is a smooth process. For small Prandtl numbers, melting and rotation are uncoupled and the interface remains straight, but the number of cells found in the melt at any given time is generally different from that found in an identical cavity of fixed geometry. For a Prandtl number of order one, there is a strong coupling between melting and the Taylor vortices and the interface becomes highly distorted.